Grundwissen 9. Klasse, Wpfgr. I: Lineare Gleichungssysteme

Lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen:

$a_1x + b_1y = c_1 \quad \wedge \quad a_2x + b_2y = c_2 \quad ; \mathbb{G} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q},\ a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$

Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ gibt es drei Möglichkeiten:

$\mathbb{L} = \emptyset$, falls $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad \wedge \quad \frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}$

$\mathbb{L} = \{(e \mid f)\}$, falls $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$

$\mathbb{L} = \{(x|y) \mid a_1x + b_1y = c_1\}$, falls $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad \wedge \quad \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$

Lösungsverfahren:

1. Gleichsetzungsverfahren

Beispiel:

$x - 2y = -2 \wedge x + y = 7;\ \mathbb{G} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + 1 \wedge y = -x + 7$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x + 1 = -x + 7 \wedge y = -x + 7$

$\Leftrightarrow \quad 1\frac{1}{2}x = 6 \wedge y = -x + 7$

$\Leftrightarrow \quad x = 4 \wedge y = -4 + 7$

$\Leftrightarrow \quad x = 4 \wedge y = 3$

$\mathbb{L} = \{(4 \mid 3)\}$

2. Einsetzungsverfahren

$7x + 7y = 28 \wedge 7y = 21x;\ \mathbb{G} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$\Leftrightarrow \quad 7x + 21x = 28 \wedge y = 3x$

$\Leftrightarrow \quad 28x = 28 \wedge y = 3x$

$\Leftrightarrow \quad x = 1 \wedge y = 3 \cdot 1$

$\Leftrightarrow \quad x = 1 \wedge y = 3$

$\mathbb{L} = \{(1 \mid 3)\}$

3. Additionsverfahren

Beispiel:

$3x + y = 5 \wedge 3x + 6y = 15;\ \mathbb{G} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$\Leftrightarrow \quad 3x + y = 5 \wedge 3x + 6y - 3x - y = 15 - 5$

$\Leftrightarrow \quad 3x + y = 5 \wedge 5y = 10$

$\Leftrightarrow \quad y = 2 \wedge 3x + 2 = 5$

$\Leftrightarrow \quad y = 2 \wedge x = 1$

$\mathbb{L} = \{(1 \mid 2)\}$

4. Determinantenverfahren

Berechnung einer Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \wedge a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad \mathbb{G} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

$$D_N = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

1. Fall:	$D_N \neq 0$	=>	$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{D_x}{D_N} \mid \frac{D_y}{D_N}\right)\right\}$
2. Fall:	$D_N = 0 \wedge (D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0)$	=>	$\mathbb{L} = \emptyset$
3. Fall:	$D_N = 0 \wedge D_x = 0 \wedge D_y = 0$	=>	$\mathbb{L} = \{(x|y) \mid a_1x + b_1y = c_1\}$

Zusammenstellung: Anette Schalk, Staatliche Realschule Geisenfeld